*Модел. и анализ информ. систем.* Т. **20**, № **5** (2013) 106–116


УДК 517.5

# Точные значения поперечников некоторых классов функций из $L_2$ и минимизация констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина

Юсупов Г. А.

*Таджикский национальный университет*
*734025, Таджикистан, г. Душанбе, проспект Рудаки, 17.*

*e-mail: G_7777@mail.ru*

*получена 8 апреля 2013*

**Ключевые слова:** наилучшие приближения, модуль непрерывности $m$-го порядка, $n$-поперечники

Рассматривается экстремальная задача нахождения точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина между наилучшими приближениями периодических дифференцируемых функций $f \in L_2^{(r)}[0, 2\pi]$ тригонометрическими полиномами и усреднёнными значениями с положительным весом $\varphi$ модулями непрерывности $m$-го порядка $\omega_m(f^{(r)}, t)$, принадлежащих пространству $L_p$, $0 < p \le 2$. В частности, решена задача о минимизации константы в указанных неравенствах по всем подпространствам размерности $n$, поставленная Н.П. Корнейчуком. Для некоторых классов функций, определяемых указанными модулями непрерывности, найдены точные значения $n$-поперечников класса

$$L_2^{(r)}(m, p, h; \varphi) := \left\{ f \in L_2^{(r)} : \left( \int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t)_2 \, \varphi(t) dt \right)^{1/p} \left( \int_0^h \varphi(t) dt \right)^{-1/p} \le 1 \right\}$$

в гильбертовом пространстве $L_2$ и указаны соответствующие экстремальные подпространства. Приведённые в данной статье результаты являются продолжением и обобщением некоторых ранее известных результатов, полученных в этом направлении.

## 1. Введение

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+$ – множество положительных чисел вещественной оси; $L_2 \equiv L_2[0, 2\pi]$ – пространство измеримых и суммируемых с квадратом по Лебегу $2\pi$-периодических функций, у которых норма

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2[0,2\pi]} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(x)|^2dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Через $\Im_{2n-1}$ обозначим подпространство тригонометрических полиномов порядка $\le n-1$. Известно, что для произвольной функции $f\in L_2$, которая имеет формальное разложение в ряд Фурье

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right),$$

величина её наилучшего приближения элементами подпространства $\Im_{2n-1}$ в пространстве $L_2$ равна

$$E_{n-1}(f)=\inf\Big\{\|f-T_{n-1}\|_2:\ T_{n-1}\in\Im_{2n-1}\Big\}=\|f-S_{n-1}(f)\|_2=\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\right\}^{1/2}, \quad (1.1)$$

где $S_{n-1}(f)$ – частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье $f$, а $\rho_k^2=a_k^2+b_k^2$, $k\in\mathbb{N}$, $k\ge n$.

Символом $L_2^{(r)}$ $(r\in\mathbb{N};\ L_2^{(0)}\equiv L_2)$ обозначим множество функций $f\in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка абсолютно непрерывны, а производные $r$-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству $L_2$.

Модуль непрерывности $m$-го порядка функции $f\in L_2$ обозначим через

$$\omega_m(f,t)_2:=\sup\Big\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\|_2:\ |h|\le t\Big\},$$

где

$$\Delta_h^m f(x)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j}f(x+jh)$$

– разность $m$-го порядка функции $f\in L_2$ с шагом $h$.

Напомним, что под неравенствами типа Джексона – Стечкина в рассматриваемом нормированном пространстве $X$ понимают соотношения, в которых погрешность приближения индивидуальной функции $f\in X$ оценивается через модуль непрерывности самой приближаемой функции или некоторой её производной:

$$E_{n-1}(f)_X\le\chi\, n^{-r}\omega_m\left(f^{(r)},\frac{t}{n}\right)_X,\ t>0.$$

В случае $X=L_2$ задача отыскания точной константы

$$\chi:=\sup\left\{\frac{n^rE_{n-1}(f)}{\omega_m(f^{(r)};t/n)_2}:\ f\in L_2,\ f^{(r)}\ne const\right\}$$

рассматривалась во многих работах (см., например, [1]–[10] и приведённую в них литературу). С этой целью были введены различные экстремальные аппроксимационные характеристики. Например, А.А. Лигун [2] рассмотрел следующую экстремальную характеристику (всюду далее отношение 0/0 полагаем равным нулю):

$$\mathcal{K}_{m,n,r}(\varphi,h) := \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{E_{n-1}^2(f)}{\int\limits_0^h \omega_m^2(f^{(r)},t)_2\,\varphi(t)dt},$$

где $m,n \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $0 < h \leqslant \pi/n$; $\varphi \geqslant 0$ — суммируемая на $[0,h]$ функция. Он показал, что

$$\Big\{B_{n,h}^{r,m}(\varphi)\Big\}^{-1} \leqslant \mathcal{K}_{m,n,r}(\varphi,h) \leqslant \Big\{\inf_{n\leqslant k<\infty} B_{k,h}^{r,m}(\varphi)\Big\}^{-1}.$$

Здесь

$$B_{k,h}^{r,m}(\varphi) := 2^m k^{2r}\int\limits_0^h (1-\cos kt)^m\varphi(t)dt, \quad k\geqslant n.$$

С целью обобщения результатов [2] М.Ш. Шабозов и Г.А. Юсупов рассмотрели экстремальную характеристику [9]

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi,h) := \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)},t)_2\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}, \tag{1.2}$$

где $m,n \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $0 < p \le 2$; $0 < h \leqslant \pi/n$; $\varphi \geqslant 0$ — суммируемая на $[0,h]$ функция, и установили следующие неравенства

$$\Big\{\mathcal{A}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi)\Big\}^{-1} \leqslant \chi_{m,n,r,p}(\varphi,h) \leqslant \Big\{\inf_{n\leqslant k<\infty} \mathcal{A}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)\Big\}^{-1}, \tag{1.3}$$

полагая

$$\mathcal{A}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) := 2^{m/2}\left(k^{rp}\int\limits_0^h (1-\cos kt)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}, \quad k\geqslant n.$$

Отметим, что при $\varphi(t) = \sin^\gamma(\beta t/h)$, $0 \le \gamma \le rp-1$, $r \in \mathbb{R}_+$, $0 < \beta < \pi$, $0 < h \le \pi/n$ характеристика (1.2) была рассмотрена в работе М.Г. Есмаганбетова [4], причём в этом случае

$$\inf_{n\le k<\infty} \mathcal{A}_{k,h,p}^{r,m}\left(\sin^\gamma \frac{\beta t}{h}\right) = \mathcal{A}_{n,h,p}^{r,m}\left(\sin^\gamma \frac{\beta t}{h}\right).$$

При вычислении точных значений $n$-поперечников классов функций, непосредственно вытекающих из (1.2), и в связи с точностью неравенства (1.3) возникает необходимость установления равенства

$$\inf_{n\le k<\infty} \mathcal{A}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) = \mathcal{A}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi) \tag{1.4}$$

для любой положительной суммируемой функции $\varphi$ на промежутке $[0, h]$ при тех же ограничениях на указанных параметрах. В общем случае проверка условия (1.4) не всегда удаётся. Для некоторых конкретных весовых функций выполнение условия (1.4) доказано в работе [10]. Возникает естественный вопрос: какими структурными и дифференциальными свойствами должна обладать функция $\varphi$, чтобы выполнялось соотношение (1.4)?

## 2. Наилучшее приближение $2\pi$-периодических функций в пространстве $L_2$

В этом параграфе мы дадим ответ на поставленный выше вопрос в зависимости от дифференциальных свойств весовых функций $\varphi$. Справедлива следующая

**Теорема 2.1.** *Пусть весовая функция $\varphi$, заданная на отрезке $[0, h]$, является неотрицательной и непрерывно дифференцируемой на нём. Если при некоторых $r \in \mathbb{N}$, $1/r < p \le 2$ и любых $t \in [0, h]$ выполнено дифференциальное неравенство*

$$(rp-1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \ge 0, \tag{2.1}$$

*то при любых $m, n \in \mathbb{N}$ и $0 < h \le \pi/n$ справедливо равенство*

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi;\, h) = 2^{-m} n^{-r} \left( \int\limits_0^h \left( \sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \tag{2.2}$$

*Существует функция $f_0 \in L_2^{(r)}$, $f_0^{(r)} \ne const$, реализующая верхнюю грань в (1.2), равная правой части (2.2).*

*Доказательство.* Воспользуемся следующим упрощенным вариантом неравенства Минковского (см., например, [12, с. 104])

$$\left( \int\limits_0^h \left( \sum_{k=n}^{\infty} |f_k(t)|^2 \right)^{p/2} \varphi(t) dt \right)^{1/p} \ge \left( \sum_{k=n}^{\infty} \left( \int\limits_0^h |f_k(t)|^p \varphi(t) dt \right)^{2/p} \right)^{1/2},$$

$$(0 < p \le 2;\ \varphi \ge 0,\ 0 < t \le h).$$

Действительно, имея в виду, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ имеет место соотношение

$$\omega_m^2(f^{(r)}; t)_2 = 2^m \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2 \left(1 - \cos ku\right)^m :\ |u| \le t \right\},$$

получаем

$$\left( \int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t)_2\, \varphi(t) dt \right)^{1/p} \ge$$

$$\geq \left\{ \int\limits_0^h \left[ 2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2 \Big( 1 - \cos kt \Big)^m \right]^{p/2} \varphi(t) dt \right\}^{1/p} \geq$$

$$\geq \left\{ 2^m \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \left( k^{rp} \int\limits_0^h (1 - \cos kt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{2/p} \right\}^{1/2}. \tag{2.3}$$

Легко доказать, что функция

$$y(x) = x^{rp} \int\limits_0^h (1 - \cos xt)^{mp/2} \varphi(t) dt \tag{2.4}$$

в области $Q = \Big\{ x : \ x \geq n \Big\}, \ n \in \mathbb{N}$ является монотонно возрастающей и

$$\min \Big\{ y(x) : \ x \in Q \Big\} = y(n) := n^{rp} \int\limits_0^h (1 - \cos nt)^{mp/2} \varphi(t) dt. \tag{2.5}$$

В самом деле, дифференцируя (2.4) и применяя элементарное тождество

$$\frac{d}{dx} (1 - \cos xt)^{mp/2} = \frac{t}{x} \cdot \frac{d}{dt} (1 - \cos xt)^{mp/2},$$

будем иметь

$$y'(x) = rpx^{rp-1} \int\limits_0^h (1 - \cos xt)^{mp/2} \varphi(t) dt + x^{rp} \int\limits_0^h \frac{d}{dx} (1 - \cos xt)^{mp/2} \varphi(t) dt =$$

$$= rpx^{rp-1} \int\limits_0^h (1 - \cos xt)^{mp/2} \varphi(t) dt + x^{rp-1} \int\limits_0^h \frac{d}{dt} (1 - \cos xt)^{mp/2} \varphi(t) dt. \tag{2.6}$$

Выполнив интегрирование по частям в последнем интеграле равенства (2.6), с учётом неравенства (2.1), окончательно получаем

$$y'(x) = x^{rp-1} \Bigg\{ (1 - \cos hx)^{mp/2} h \varphi(h) +$$

$$+ \int\limits_0^h (1 - \cos xt)^{mp/2} \Big[ (rp - 1) \varphi(t) - t \varphi'(t) \Big] dt \Bigg\} \geq 0,$$

откуда сразу следует соотношение (2.5).

Учитывая (1.1) и (2.5), продолжим неравенство (2.3):

$$\cdots \geq 2^{m/2} n^r \left( \int_0^h (1-\cos nt)^{mp/2}\, \varphi(t) dt \right)^{1/p} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \right\}^{1/2} =$$

$$= 2^m n^r E_{n-1}(f) \left( \int_0^h \left( \sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p}. \tag{2.7}$$

Из неравенства (2.3) и (2.7) следует, что

$$\frac{E_{n-1}(f)}{\left( \int_0^h \omega_m^p (f^{(r)}; t)_2\, \varphi(t) dt \right)^{1/p}} \leq 2^{-m} n^{-r} \left( \int_0^h \left( \sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}.$$

Так как последнее неравенство имеет место для любого $f \in L_2^{(r)}$, то мы имеем оценку сверху для величины (2.2):

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi;\, h) \leq 2^{-m} n^{-r} \left( \int_0^h \left( \sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \tag{2.8}$$

Оценку снизу величины (2.2), справедливую при всех $0 < h \leq \pi/n$, получаем для функции $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$, для которой

$$E_{n-1}(f_0) = 1, \quad \omega_m(f_0^{(r)}; t)_2 = 2^m n^r \left( \sin \frac{nt}{2} \right)^m, \quad 0 < nt \leq \pi.$$

Имеем

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi;\, h) \geq$$

$$\geq \frac{E_{n-1}(f_0)}{\left( \int_0^h \omega_m^p (f_0^{(r)}; t)_2\, \varphi(t) dt \right)^{1/p}} = 2^{-m} n^{-r} \left( \int_0^h \left( \sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \tag{2.9}$$

Требуемое равенство (2.2) получаем из сопоставления неравенств (2.8) и (2.9), чем и завершаем доказательство теоремы 2.1. □

# 3. Точные значения поперечников класса $L_2^{(r)}(m, p, h; \varphi)$ в пространстве $L_2$

Пусть $S$ — единичный шар в $L_2$; $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из $L_2$; $\Lambda_N \subset L_2$ — $N$-мерное подпространство; $\Lambda^N \subset L_2$ — подпространство коразмерности $N$; $l: L_2 \to \Lambda_N$ — непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства $L_2$ в $\Lambda_N$; $l^{\perp}: L_2 \to \Lambda_N$ — непрерывный оператор линейного проектирования пространства $L_2$ на подпространство $\Lambda_N$. Величины

$$b_N(\mathfrak{M}, L_2) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0;\ \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_{n+1} \subset L_2\right\},$$

$$d^N(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\|_2 : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset L_2\right\},$$

$$d_N(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-g\|_2 : g \in \Lambda_n\right\} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$\lambda_N(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - lf\|_2 : f \in \mathfrak{M}\right\} : lL_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$\pi_N(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - l^{\perp}f\|_2 : f \in \mathfrak{M}\right\} : l^{\perp}L_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\}$$

называют соответственно бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным, проекционным $N$-поперечниками в пространстве $L_2$. Указанные величины монотонно убывают по $N$ и между ними в пространстве $L_2$ выполняются соотношения [11],[12]:

$$b_N(\mathfrak{M}; L_2) \le d^N(\mathfrak{M}; L_2) \le d_N(\mathfrak{M}; L_2) = \lambda_N(\mathfrak{M}; L_2) = \pi_N(\mathfrak{M}; L_2). \tag{3.1}$$

Через $W_m(f^{(r)};\ \varphi)_{p,h},\ m, r \in \mathbb{N},\ 0 < p \le 2,\ 0 < h \le \pi$ обозначим среднее в $p$-й степени значение модуля непрерывности порядка $m$ от функции $f^{(r)}$ с весом $\varphi$ :

$$W_m(f^{(r)}; \varphi)_{p,h} = \left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t)_2\, \varphi(t)dt\right)^{1/p} \left(\int\limits_0^h \varphi(t)dt\right)^{-1/p}, \tag{3.2}$$

а через $L_2^{(r)}(m, p, h; \varphi)$ обозначим множество функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых

$$W_m(f^{(r)}; \varphi)_{p,h} \le 1.$$

Следуя монографии [13, с. 385], положим

$$\mathbb{K}_{N,m,p,h}\left(L_2^{(r)}, L_2\right) = \inf\left\{\sup\left\{\frac{E\left(f, \Im_N\right)_2}{W_m\left(f^{(r)}; \varphi\right)_{p,h}} :\ f \in L_2^{(r)}\right\} :\ \Im_N \subset L_2\right\},$$

$$E_{n-1}\left(L_2^{(r)}(m, p, h; \varphi)\right) = \sup\left\{\|f - S_{n-1}(f)\|_2 :\ f \in L_2^{(r)}(m, p, h; \varphi)\right\}.$$

Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 3.1.** *Пусть весовая функция $\varphi$, заданная на отрезке $[0, h]$, является неотрицательной и непрерывно дифференцируемой. Если при некоторых значениях $1/r < p \le 2,\ r \in \mathbb{N}$ и любых $t \in [0, h]$ выполнено неравенство*

$$(rp - 1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \ge 0, \tag{3.3}$$

*то при всех $m, n \in \mathbb{N}$ и $0 < h \le \pi/n$ справедливы равенства*

$$\mathbb{K}_{2n,m,p,h}\left(L_2^{(r)}, L_2\right) = \mathbb{K}_{2n-1,m,p,h}\left(L_2^{(r)}, L_2\right) = E_{n-1}\left(L_2^{(r)}(m, p, h; \varphi)\right)_2 =$$

$$= \delta_{2n}\left(L_2^{(r)}(p,h,m;\varphi), L_2\right) = \delta_{2n-1}\left(L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi), L_2\right) =$$

$$= 2^{-m}n^{-r}\left\{\int\limits_0^h \varphi(t)dt\right\}^{1/p}\left\{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p},$$

*где* $\delta_N(\cdot)$ *— любой из* $N$*-поперечников* $b_N(\cdot), d^N(\cdot), d_N(\cdot), \lambda_N(\cdot), \pi_N(\cdot)$.

*Доказательство.* В самом деле, из (2.7) вытекает, что

$$E_{n-1}(f) \le 2^{-m}n^{-r}\frac{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)};t)_2\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= 2^{-m}n^{-r}\left(\frac{\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)};t)_2\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}\right)^{1/p}\cdot\left(\frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt}\right)^{1/p}$$

верно при выполнении неравенства (3.3). Отсюда для проекционного $N$-поперечника класса $L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi)$ получаем оценку сверху

$$\pi_{2n}\left(L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi), L_2\right) \le \pi_{2n-1}\left(L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi), L_2\right) \le E_{n-1}\left(L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi)\right) \le$$

$$\le 2^{-m}n^{-r}\left\{\int\limits_0^h \varphi(t)dt\right\}^{1/p}\left\{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \tag{3.4}$$

С целью получения оценки снизу для бернштейновского $N$-поперечника класса $L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi)$ введём в рассмотрение шар

$$\mathbb{B}_{2n+1} = \left\{T_n \in \Im_{2n+1}:\ \|T_n\|_2 \le \frac{2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h \varphi(t)dt\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}\right\}$$

в $(2n+1)$-мерном подпространстве $\Im_{2n+1}$ тригонометрических полиномов и покажем, что $\mathbb{B}_{2n+1} \subset L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi)$. Нетрудно доказать, что

$$\omega_m\left(T_n^{(r)}, t\right)_2 \le 2^m n^r\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^m \|T_n\|_2. \tag{3.5}$$

Обе части неравенства (3.5) возведём в степень $p$ $(1/r < p \le 2)$ и проинтегрируем полученное соотношение по $t$ в пределах от 0 до $h$, откуда непосредственно получаем

$$\left(\frac{\int\limits_0^h \omega_m^p\left(T_n^{(r)};t\right)_2\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}\right)^{1/p} \le 2^m n^r \left(\frac{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}\right)^{1/p} \cdot \|T_n\|_2 \le 1,$$

а потому $\mathbb{B}_{2n+1} \subset L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi)$. В силу определения бернштейновского $N$-поперечника имеем оценки снизу

$$b_{2n-1}\left(L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi),L_2\right) \ge b_{2n}\left(L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi),L_2\right) \ge b_{2n}\left(\mathbb{B}_{2n+1},L_2\right) =$$

$$= 2^{-m}n^{-r}\left\{\int\limits_0^h \varphi(t)dt\right\}^{1/p}\left\{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \quad (3.6)$$

Сопоставляя неравенства (3.4) и (3.6), с учётом соотношения (3.1) завершаем доказательство теоремы 3.1. □

Из доказанной теоремы 3.1 в качестве следствия получаем результат работы [4].

**Следствие 3.1.** *Пусть* $\varphi_*(t) = \sin^\gamma(\beta t/h)$; $0 \le \gamma \le rp-1, r \ge 1, 1/r < p \le 2$. *Тогда имеют место равенства*

$$\mathbb{K}_{2n,m,p,h}\left(L_2^{(r)},L_2\right) = \mathbb{K}_{2n-1,m,p,h}\left(L_2^{(r)},L_2\right) =$$

$$= \delta_{2n}\left(L_2^{(r)}(p,h,m;\varphi_*),L_2\right) = \delta_{2n-1}\left(L_2^{(r)}(p,h,m;\varphi_*),L_2\right) =$$

$$= 2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h \sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt\right)^{-1/p},$$

*где* $\delta_N(\cdot)$ *— любой из перечисленных выше* $N$*-поперечников.*

Автор благодарит рецензента за ценные замечания, использованные в работе.

# Список литературы


1. Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из $L_2$ // Математические заметки. 1979. Т. 25, №2. С. 217–223. (English transl.: Taikov L.V. Structural and constructive characteristics of function from $L_2$ // Matematicheskie Zametki. 1979. V. 25, №2. P. 217–223.)

2. Лигун А.А. Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве $L_2$ // Математические заметки. 1988. Т. 43, №6. С. 757–769. (English transl.: Ligun A.A. Exact inequalities of Jackson type for periodic functions in space $L_2$ // Matematicheskie Zametki. 1988. V. 43, №6. P. 757–769.)

3. Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах $L_p$. Тула: Тульский государственный университет, 1995. (Ivanov V.I., Smirnov O.I. Konstanty Dzheksona i konstanty Junga v prostranstvah $L_p$. Tula: Tul'skiy gosudarstvennyj universitet, 1995 [in Russian].)

4. Есмаганбетов М.Г. Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Математические заметки. 1999. Т. 65, №6. С. 816–820. (English transl.: Esmaganbetov M.G. Widths of classes from $L_2[0, 2\pi]$ and the minimization of exact constants in Jackson-type inequalities // Matematicheskie Zametki. 1999. V. 65, №6. P. 816–820.)

5. Бабенко А.Г., Черных Н.И., Шевалдин В.Т. Неравенства Джексона – Стечкина в $L_2$ с тригонометрическим модулем непрерывности // Математические заметки. 1999. Т. 65, №6. С. 928–932. (English transl.: Babenko A.G., Chernykh N.I., Shevaldin V.T. The Jackson – Stechkin inequality in $L_2$ with a trigonometric modulus of continuity // Matematicheskie Zametki. 1999. V. 65, №6. P. 777–781.)

6. Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из $L_2$ // Математические заметки. 2005. Т. 78, №5. С. 792–796. (English transl.: Vakarchuk S.B. Exact constants in Jackson-type inequalities and exact values of widths // Matematicheskie Zametki. 2005. V. 78, №5. P. 792–796.)

7. Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в $L_2$ // Математические заметки. 2006. Т. 80, №1. С. 11–19. (English transl.: Vakarchuk S.B. Jackson-type inequalities and widths of function classes in $L_2$ // Matematicheskie Zametki. 2006. V. 80, №1. P. 11–19.)

8. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Математические заметки. 2010. Т. 87, №4. С. 616–623. (English transl.: Shabozov M.Sh. Widths of classes periodical differentiable functions in $L_2[0, 2\pi]$ // Matematicheskie Zametki. 2010. V. 87, №4. P. 616–623.)

9. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в $L_2$ некоторых классов $2\pi$-периодических функций и точные значения их поперечников // Математические заметки. 2011. Т. 90, №5. С. 764–775. (English transl.: Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Best polynomial approximations in $L_2$ of classes of $2\pi$-periodic functions and exact values of their widths // Matematicheskie Zametki. 2011. V. 90, №5. P. 764–775.)

10. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Widths of certain classes of periodic functions in $L_2$ // Journal of Approximation Theory. 2012. V. 164, Issue 1. P. 869–878.

11. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ, 1976. (Tikhomirov V.M. Nekotorye voprosy teorii priblizhenij. Moskva: Moskovskij gosudarstvennyj universitet, 1976 [in Russian].)

12. Pinkus A. $n$-Widths in Approximation Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1985.

13. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987. (Korneĭchuk N.P. Exact Constants in Approximation Theory. Moskva: Nauka, 1987; English transl. in Encyclopedia Math. Appl., V. 38, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1991.)

# Exact Values of Widths of Some Functional Classes in $L_2$ and Minimization of the Constants in Inequalities of Jackson – Stechkin Type

Yusupov G.A.

*Tajik National University*
*Rudaki Av., 17, Dushanbe city, 734025, Tajikistan*

**Keywords:** best approximations, module of continuity of $m$th order, $n$-widths

In this paper, it is considered the extremal problem of finding the exact constants in inequalities of Jackson – Stechkin type between the best approximations of periodic differentiable functions $f \in L_2^{(r)}[0, 2\pi]$ by trigonometric polynomials, and the average values with a positive weight $\varphi$ moduli of continuity of $m$th order $\omega_m(f^{(r)}, t)$, belonging to the space $L_p$, $0 < p \leq 2$. In particular, the problem of minimizing the constants in these inequalities over all subspaces of dimension $n$, raised by N.P. Korneychuk, is solved. For some classes of functions defined by the specified moduli of continuity, the exact values of $n$-widths of class

$$L_2^{(r)}(m, p, h; \varphi) := \left\{ f \in L_2^{(r)} : \left( \int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t)_2 \, \varphi(t) dt \right)^{1/p} \left( \int_0^h \varphi(t) dt \right)^{-1/p} \leq 1 \right\}$$

are found in the Hilbert space $L_2$, and the extreme subspace is identified. In this article, the results are shown which are the extension and the generalization of some earlier results obtained in this line of investigation.

**Сведения об авторе:**
**Юсупов Гулзорхон Амиршоевич,**
Таджикский национальный университет,
кандидат физико-математических наук, доцент